ДЦС Интеграл 22.10.12

$|\sin x| \le x$

$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$x_1, x_2 \dots x_n \to 0$

$\cos x_n = 1 - 2\sin^2 x/2 \to 0$

$\cos x_n \to 1 \qquad \cos(0)$

$x - x_0 = y$

$|\cos(y + x_0) - \cos x_0| = |-2\sin\frac{(y + 2x_0)}{2}|$

$\sin y/2 \le 2$ но $\sin y/2 \to 0$

$\cos x \to \cos x_0$

$x \to x_0$

$f(x)\ D \qquad g(t)\ D_1$

$D_1 \xrightarrow{g(t)} D \qquad f(g(t))\ D_1$ сложна функция

зд. $F(t) = f(g(t))$

$t_1, t_2 \dots t_n \to t_0$

$x_1 = g(t_1),\ x_2 = g(t_2) \dots \to \qquad x_0 = g(t_0)$

Хайне

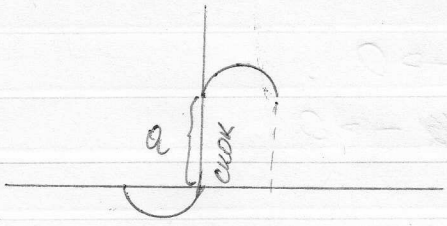
$F(t_1), F(t_2) \dots F(t_n) \to F(t_0)$

$\|\ \ \|\ \ \|$

$f(x_1)\ f(x_2) \dots f(x_n) \to f(x_0)$

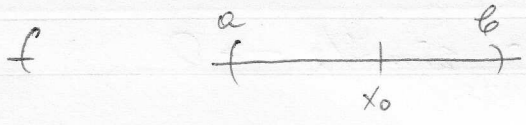
$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \dots b^{n-1})$$

$$|x_n^m - x_0^m| = \underbrace{|x_n - x_0|}_{0} \underbrace{|x_n^{m-1} + x_n^{m-2} x_0 - \dots - x_0^{m-1}|}_{x_0^m (m-1)}$$



$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 > 0} f(x) = \lim f(x+0)$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 < 0} f(x) = \lim (x-0)$$



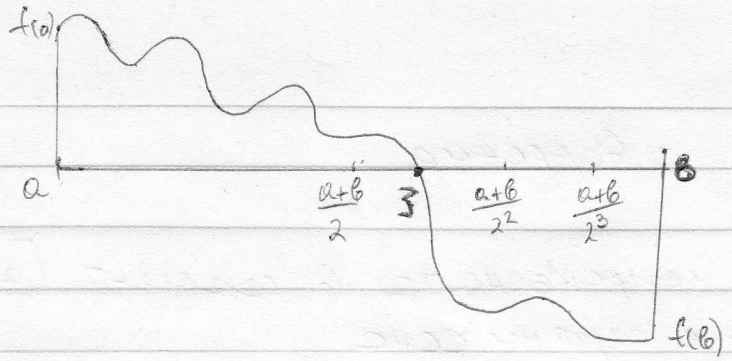
$f(x_0) \qquad x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \qquad f(x) > 0$

Коши

$\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ т.ч.

$|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \iff$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \\ \varepsilon_0 = \dfrac{f(x_0)}{2} \; ; \; |x - x_0| < \delta_0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x)$$



$f(3) = 0$ $\quad f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$

Нека $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) > 0\} \Rightarrow \exists \sup_{x \in A} A = c$

точна горна граница

$\inf$ - точна долна граница

разгл $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ множество

$$c - \varepsilon < f(x_0) \leq c$$

$(x_0 - \delta; x_0 + \delta_0)$

$\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \dots \Delta_n \geq \dots \longrightarrow 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a_0 \qquad \lim\limits_{n \to \infty} b_n = b_0$

$b_n - a_n \to 0 \;/\; a_0 - b_0 = 3 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} a_1, a_2 \dots a_n \to 3 \\ b_1, b_2 \dots b_n \to 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a_1), f(a_2) \dots f(a_n) \to 3 \\ f(b_1), f(b_2) \dots f(b_n) \to 3 \end{array}\right.$$

$f(a_n) > 0 \longrightarrow f(3) \geq 0$ но $f(b_n) < 0 \longrightarrow f(3) \leq 0$

$\Rightarrow f(3) = 0$

I Важно твърдение

Ако $f(x)$ е непрекъсната в сегмент $[a,b]$ тогава тя е ограничена

Доказателство

Допускаме противното

$|f(x)| \leq C$ такава че не е ограничена

$\exists \boxed{f(x_n) \geq n}$ $x_n \in [a\,b]$ / $\{x_n\}$ ограничена

$x_1, x_2 \dots x_n$

от Б. на Вайерщрас

Всяка ограничена редица има сходяща подредица

имаме

$x_{n_1}, x_{n_2} \dots x_{n_k}$ - подредица $\longrightarrow x_0$

$$\begin{array}{ccccc} a & \leq & x_{n_k} & \leq & b \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & \leq & x_0 & \leq & b \end{array}$$

$\underbrace{f(x_{n_1}), f(x_{n_2}) \dots f(x_{n_k})}_{\text{неограничена}} \longrightarrow f(x_0)$

$f(x_{n_k}) = n_k$

$\Rightarrow$ грешно от допускането